

# 基于博弈论的 MIMO 认知无线电波形自适应算法

魏 飞, 杨 震

(南京邮电大学宽带无线通信与传感网技术教育部重点实验室, 江苏南京 210003)

**摘 要:** 本文从非合作博弈的角度研究了 MIMO 认知无线电(MIMO-CR)网络中最大化信息速率的波形自适应问题,证明了在给定条件下 Nash 均衡的存在与唯一性,并提出了一种求解 Nash 均衡的带惩罚价格的分布式迭代注水算法——MIMO-CR IWFA,通过价格机制的运用使得 MIMO-CR 在满足主用户的干扰温度约束时最大化各自的信息速率;同时证明了在给定条件下 MIMO-CR IWFA 能够收敛到唯一 Nash 均衡解.仿真结果表明 MIMO-CR IWFA 具有快速收敛特性且能够很好的满足干扰温度约束;虽然受到主用户的干扰温度约束限制,MIMO-CR IWFA 的性能能够随着 MIMO-CR 链路之间的同信道干扰的增大而逐渐接近不考虑干扰温度约束的经典 MIMO 迭代注水算法(MIMO IWFA).

**关键词:** 多人多出; 迭代注水算法; Nash 均衡; 博弈论; 认知无线电

**中图分类号:** TN92      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2011) 10-2269-08

## A Waveform Adaptation Algorithm Based on Game Theory for MIMO Cognitive Radio

WEI Fei, YANG Zhen

(Key Laboratory of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Ministry of Education, Nanjing University of Posts & Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

**Abstract:** The problem of waveform adaptation to maximize information rate in a multiple-in multiple-out cognitive radio (MIMO-CR) network is investigated from a non-cooperative game theoretic viewpoint. The existence and uniqueness of the Nash equilibrium under certain circumstances is proved and a decentralized iterative water-filling algorithm with punishing price, MIMO-CR IWFA, is proposed to solve the above problem, the pricing mechanism is used to satisfy the interference-temperature constraint while achieving the Nash equilibrium, the conditions for the convergence of MIMO-CR IWFA are also provided. Simulation results show our MIMO-CR IWFA can satisfy the interference-temperature constraint perfectly and is fast convergent; and though constrained by PU's interference-temperature, the performance of MIMO-CR IWFA can still approach the classical MIMO IWFA, which does not consider the interference-temperature constraint, with the increase of co-channel interference between MIMO-CRs.

**Key words:** multiple-in multiple-out (MIMO); iterative water-filling algorithm (IWFA); nash equilibrium; game theory; cognitive radio

### 1 引言

随着无线通信技术的发展,对无线频谱资源需求的不断增加与可分配频谱资源的稀缺性之间的矛盾正不断加剧,而实际测量结果却表明大量已分配频谱资源处于闲置或低利用率状态<sup>[1]</sup>.认知无线电<sup>[2]</sup>技术通过认知无线电(CR: Cognitive Radio)用户或从用户(SU: Secondary User)与主用户(PU: Primary User)共享频谱资源的方式来最大化频谱利用率,作为一种解决当前频谱困境的有效技术手段正受到广泛的研究<sup>[3-5]</sup>.在认知无线电场景中,CR用户通常采用干扰温度约束的方式,即使得所有

CR用户对PU接收端的叠加干扰限制在PU的干扰门限内,在保证PU正常通信的前提下与PU共享频谱,其中PU干扰门限的大小可由PU根据自身的QoS(Quality of Service)要求确定.

多人多出(MIMO: Multiple-In Multiple-Out)技术通过在收发端使用多根天线可以在不增加带宽与发送功率的条件下有效提高通信系统的容量与性能.本文考虑的认知无线电系统中的CR链路的收发节点都装备有多根天线,简称为MIMO-CR.文献[6,7]研究了单个MIMO-CR如何设计发送协方差矩阵以获取最大信息速率.与上述研究不同的是,本文关注的是多个MIMO-CR与PU

共享频谱的问题.对于包含有多个 MIMO-CR 与 PU 共享频谱资源的 CR 系统,通常可使用全局优化使得系统效用最大化,但这会遇到以下两个难题:(1)需要中心控制节点采集所有 MIMO-CR 用户的信道状态信息以及互信道状态信息同时还需包括 MIMO-CR 与 PU 之间的信道状态信息,实现时需要巨大的信令开销因而系统不具有扩展性;(2)由于系统效用函数的非凸性<sup>[8]</sup>,即使可以获取所有需要的信道状态信息,也无法设计出求解最大系统效用的通用算法.

为解决上述难题,本文通过每个 MIMO-CR 选择自己的发送波形(即发送协方差矩阵),分别优化各自的效用来代替对整体效用的优化,优化的结果即著名的非合作博弈中的 Nash 均衡<sup>[9]</sup>.在普通无线通信场景中,多个 MIMO 用户可使用经典的 MIMO 迭代注水算法(I-WFA: Iterative Water-Filling Algorithm,)来分布式实现各自效用的最大化,达到 Nash 均衡状态<sup>[8,10,11]</sup>.但经典 MIMO IWFA 不具有控制所有发送节点对 PU 的叠加干扰大小的机制,不能确保满足 PU 干扰温度约束,因而不适用于认知无线电系统.本文的工作正是针对经典 MIMO IWFA 的在认知无线场景中的不足展开的,其主要内容与创新点可概括如下:

(1)使用了非合作博弈理论来建模多个 MIMO-CR 在发送功率以及 PU 干扰温度约束下通过波形自适应最大化信息速率,将其表示为 Nash 均衡(NE: Nash Equilibrium)问题;通过将 Nash 均衡问题转换为等价的变分不等式(VI: Variational Inequality)问题<sup>[12]</sup>,推导了 Nash 均衡唯一存在的充分条件.

(2)提出了一种带价格系数的分布式迭代注水算法, MIMO-CR IWFA,用以解决上述 Nash 均衡问题;通过价格机制,即使用惩罚价格使得所有参与通信的 MIMO-CR 改变发送波形,控制对 PU 的叠加干扰,从而在满足 PU 的干扰温度约束时达到 Nash 均衡,最大化各自信息速率;同时给出了 MIMO-CR IWFA 算法收敛到唯一 Nash 均衡解的条件.

(3)最后使用 MATLAB 仿真验证 MIMO-CR IWFA 的收敛性并比较了 MIMO-CR IWFA 与经典 MIMO IWFA 的性能,仿真结果表明: MIMO-CR IWFA 能够很好的满足干扰温度约束且具有快速收敛性;虽然受到主用户的干扰温度约束限制, MIMO-CR IWFA 的性能能够随着 MIMO-CR 链路之间的同信道干扰的增大而逐渐接近不考虑干扰温度约束的经典 MIMO IWFA.

## 2 系统模型与问题表述

### 2.1 系统模型

本文考虑的认知无线场景包含有共享频谱资源的  $N$  条 MIMO-CR 链路与  $M$  个 PU 接收端,如图 1 所示,

其中 PU 使用单天线,任一 MIMO-CR 链路  $l$  含有  $n_l$  根发射天线与接收天线,则 MIMO-CR 链路  $l$  接收端接收到的信号向量可表示为

$$y_l = H_l x_l + \sum_{k=1, k \neq l}^N H_{lk} x_k + n_l \quad (1)$$

其中  $x_l \in C^{n_l \times 1}$  表示 MIMO-CR  $l$  发送的信号向量,由于本文关注的是 MIMO-CR 可以获取的信息速率的极限,因此假定 MIMO-CR 使用无限长符号的理想高斯码本;  $H_{lk} \in C^{n_l \times n_k}$  表示 MIMO-CR  $k$  的发送端到 MIMO-CR  $l$  的接收端之间的复高斯信道矩阵,且假定其为慢衰落的,在一次 MIMO-CR 波形自适应过程中保持不变;  $n_l \in C^{n_l \times 1}$  是 0 均值、方差  $R_{n_l}$  (非奇异) 循环对称复高斯的噪声向量,包含 MIMO-CR  $l$  接收机的热噪声以及 PU 对其产生的干扰.

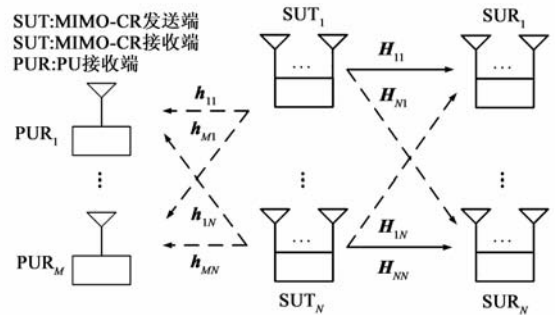


图1 MIMO-CR系统与PU系统共享频谱场景框图

由于认知用户之间对频谱的竞争特性,假定本文中的 MIMO-CR 链路通过无中心的分布式方式共享 PU 的频谱.在每个 MIMO-CR 接收端,其他 MIMO-CR 的干扰被看作有色噪声.假定任一 MIMO-CR 链路  $l$  的收发两端都可获知自己的信道状态信息  $H_{ll}$  且信道矩阵  $H_{ll}$  是非奇异的, MIMO-CR  $l$  的接收端可以准确测量到的其他 MIMO-CR 对自己的干扰以及接收机热噪声之和的协方差  $R_{-l}(\mathbf{Q}_{-l})$  为

$$R_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}) = R_{n_l} + \sum_{k=1, k \neq l}^N H_{lk} \mathbf{Q}_k H_{lk}^H \quad (2)$$

其中  $\mathbf{Q}_l = E\{x_l x_l^H\}$  表示发送信号向量  $x_l$  的协方差矩阵,简称为发送协方差矩阵.  $\mathbf{Q}_{-l} = (\mathbf{Q}_k)_{k=1, k \neq l}^N$  表示除  $l$  外的所有其他 MIMO-CR 的发送协方差矩阵.

基于上述假设,给定所有 MIMO-CR 的发送协方差矩阵  $\mathbf{Q}_l, l = 1, 2, \dots, N$ , MIMO-CR  $l$  获取的最大信息速率可表示为

$$R_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) = \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{H}_{ll}^H \mathbf{R}_{-l}^{-1}(\mathbf{Q}_{-l}) \mathbf{H}_{ll} \mathbf{Q}_l) \quad (3)$$

### 2.2 问题表述

#### 2.2.1 发送功率与干扰温度约束

每个 MIMO-CR 发送信号时受到自身发送功率约束,第  $l$  个 MIMO-CR 发送信号向量的协方差矩阵  $\mathbf{Q}_l$  构成的集合  $\mathcal{Q}_l$  可表示为

$$Q_l \triangleq \{ \mathbf{Q}_l \in C^{n_l \times n_l} : \mathbf{Q}_l \geq 0, \text{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} \leq P_s^{\max} \} \quad (4)$$

其中  $P_s^{\max}$  表示 MIMO-CR 的最大发送功率,  $\geq$  表示半正定,  $\text{Tr}\{\cdot\}$  表示矩阵的主对角元素之和。

在 CR 系统中, CR 用户在调整发送信号的参数时除需满足发送功率约束外还需考虑干扰温度约束。对于本文的 MIMO-CR 系统, PU 干扰温度约束可表示为

$$\sum_{l=1}^N \text{Tr}\{\mathbf{h}_{q_l} \mathbf{Q}_l \mathbf{h}_{q_l}^H\} \leq P_{i_u}, \quad \forall q = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

其中  $\mathbf{h}_{q_l} \in C^{1 \times n_l}$  为 MIMO-CR $l$  发送端到 PU $q$  接收端的信道向量,  $P_{i_u}$  为 PU 的干扰门限值。

### 2.2.2 Nash 均衡问题表述

本文研究的 MIMO-CR 波形自适应问题是在满足上述发送功率约束(4)和干扰温度约束(5)的条件下, CR 系统中的 MIMO-CR 如何独立优化发送协方差矩阵, 从而最大化各自的信息速率, 其可表述为 Nash 均衡问题如下

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{Q}_l} U_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{Q}_l \in Q_l, \quad \forall l = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $U_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) = R_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) - \sum_{q=1}^M c_q \text{Tr}\{\mathbf{h}_{q_l} \mathbf{Q}_l \mathbf{h}_{q_l}^H\}$  为 MIMO-CR $l$  的效用,  $c_q \geq 0$  表示 PU $q$  对 MIMO-CR 产生的单位干扰施加的惩罚价格。引入价格系数  $\mathbf{c} = (c_q)_{q=1}^M$  的目的是使所有 MIMO-CR 产生的叠加干扰满足于干扰温度约束(5), 即使得下面的互补性条件成立

$$0 \leq c_q \perp \left( P_{i_u} - \sum_{l=1}^N \text{Tr}\{\mathbf{h}_{q_l} \mathbf{Q}_l \mathbf{h}_{q_l}^H\} \right) \geq 0, \quad \forall q = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

其中  $0 \leq a \perp b \geq 0$  表示  $a > 0, b > 0$ , 且  $a \cdot b = 0$ 。互补性条件(7)表明 PU 的干扰温度约束与价格系数非负需同时满足。显然式(6)中 Nash 均衡问题的解, 即 Nash 均衡解  $\mathbf{Q}^{equ} = (\mathbf{Q}_l^{equ})_{l=1}^N$  需满足

$$U_l(\mathbf{Q}_l^{equ}, \mathbf{Q}_{-l}^{equ}) \geq U_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}^{equ}), \quad \forall \mathbf{Q}_l \in Q_l, \quad \forall l = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

为叙述方便, 在后文中用符号  $NE(\mathbf{c})$  表示式(6)中带有价格系数  $\mathbf{c}$  的 Nash 均衡问题,  $NE$  表示在互补性条件(7)约束下的  $NE(\mathbf{c})$ 。

## 3 变分不等式与 Nash 均衡

本节通过将 Nash 均衡问题转换为等价的变分不等式问题, 推导了 Nash 均衡解存在与唯一的充分条件。

### 3.1 变分不等式

首先定义集合  $\widehat{Q}$  为

$$\widehat{Q} \triangleq Q \cap \left\{ \mathbf{Q} : \sum_{l=1}^N \text{Tr}\{\mathbf{h}_{q_l} \mathbf{Q}_l \mathbf{h}_{q_l}^H\} \leq P_{i_u}, \quad \forall q = 1, 2, \dots, M \right\} \quad (9)$$

其中  $Q = \prod_{l=1}^N Q_l$  表示  $Q_l, l = 1, 2, \dots, N$  的笛卡尔乘积;

以及定义集合  $\widehat{Q}$  上的映射  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_{-1})^T, \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{-2})^T, \dots, \mathbf{F}_N(\mathbf{Q}_N, \mathbf{Q}_{-N})^T)^T$ , 其中  $\mathbf{F}_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l})^{**}$  表示  $R_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l})$  关于  $\mathbf{Q}_l$  的负梯度且有

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) &= -\nabla_{\mathbf{Q}_l} R_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) = -2 \left( \frac{\partial R_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l})}{\partial \mathbf{Q}_l} \right)^* \\ &= -2 \mathbf{H}_l(\mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}) + \mathbf{H}_l^H \mathbf{Q}_l \mathbf{H}_l^H)^{-1} \mathbf{H}_l^H \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $(\cdot)^*$ 、 $(\cdot)^H$  分别表示共轭以及共轭转置。由 Nash 均衡问题  $NE$  与变分不等式  $VI(\widehat{Q}, \mathbf{F})$  的相应 KKT (Karush - Kuhn - Tucker) 系统易知二者是等价的。

### 3.2 Nash 均衡的存在性与唯一性

**定理 1** 对任意给定的 PU 干扰门限,  $NE$  的 Nash 均衡解存在。

**证明** 对任意给定的 PU 干扰门限, 集合  $\widehat{Q}$  都是紧致闭凸集, 且函数  $\mathbf{F}$  是连续的, 所以变分不等式  $VI(\widehat{Q}, \mathbf{F})$  的解存在<sup>[12, 推论 2.2.5]</sup>, 从而其等价  $NE$  的 Nash 均衡解存在。

利用等价变分不等式的强单调性, 可给出  $NE$  存在唯一的 Nash 均衡解的充分条件如下:

**定理 2** 令

$$\begin{aligned} z_l^{\min} &= \lambda_{\min} \left( \mathbf{H}_l^H (\mathbf{R}_{n_l} + P_s^{\max} \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_{lk} \mathbf{H}_{lk}^H)^{-1} \mathbf{H}_l \right), \\ z_l^{\max} &= \lambda_{\max} (\mathbf{H}_l^H \mathbf{R}_{n_l}^{-1} \mathbf{H}_l), \end{aligned}$$

定义矩阵  $\Theta$  如下

$$[\Theta]_{lk} = \begin{cases} (z_l^{\min})^2, & k = l \\ - (z_l^{\max})^2 \lambda_{\max} (\mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{H}_{lk}), & k \neq l \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $[\Theta]_{lk}$  表示矩阵  $\Theta$  的第  $l$  行  $k$  列的元素。如满足  $\Theta + \Theta^T > 0$ , 则  $NE$  存在唯一的 Nash 均衡解。

**证明** 要证明  $NE$  存在唯一 Nash 均衡解, 只需证明  $NE$  的等价  $VI(\widehat{Q}, \mathbf{F})$  中的映射  $\mathbf{F}$  为强单调的, 下面证明  $\mathbf{F}$  的强单调性。

对  $\mathbf{F}$  中的任一  $\mathbf{F}_l$ , 由定义可得

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{[\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}, \mathbf{F}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)}) - \mathbf{F}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)})]\} \\ &= 2 \text{Re}\{\text{Tr}\{(\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)})^H ((\mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}^{(2)}) \mathbf{H}_l^{-1} + \mathbf{Q}_l^{(2)})^{-1} - (\mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}^{(1)}) \mathbf{H}_l^{-1} + \mathbf{Q}_l^{(1)})^{-1})\}\} \end{aligned} \quad (12)$$

令  $\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l) = (\mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}) \mathbf{H}_l^{-1} + \mathbf{Q}_l)^{-1}$ , 由逆矩阵性质  $\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{B}^{-1}$ , 进一步可得式(12)

\*\* 对于复变量函数  $f(z)$ , 其中  $z = x + jy$ , 其导数被定义为  $\partial f / \partial z = (1/2)((\partial f / \partial x) - j(\partial f / \partial y))$ , 梯度被定义为  $\nabla f = (\partial f / \partial x) + j(\partial f / \partial y) = 2(\partial f / \partial z)^*$ 。

$$+ \sum_{k=1, k \neq l}^N \operatorname{Re} \{ \operatorname{Tr} \{ \mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)}) (\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)})^H \cdot \mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)}) \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk} (\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}) \mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \} \} \quad (13)$$

$$\geq 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)})) \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)})) \cdot \operatorname{Tr} \{ (\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)})^H (\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}) \} \} - \sum_{k=1, k \neq l}^N \left| \operatorname{Tr} \{ \mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)}) (\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)})^H \cdot \mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)}) \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk} (\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}) \mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \} \right| \quad (14)$$

$$\geq 2 \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)})) \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)})) \|\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}\|_F^2 - 2 \sum_{k=1, k \neq l}^N \left\| \mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)}) (\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)})^H \mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)}) \right\|_F \cdot \left\| \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk} (\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}) \mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \right\|_F \quad (15)$$

$$\geq 2 \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)})) \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)})) \|\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}\|_F^2 - 2 \sum_{k=1, k \neq l}^N \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)})) \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)})) \|\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}\|_F \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk}) \|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F \quad (16)$$

$$\geq 2(z_l^{\min})^2 \|\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}\|_F^2 - 2(z_l^{\max})^2 \cdot \sum_{k=1, k \neq l}^N \lambda_{\max}(\mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk}) \cdot \|\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}\|_F \|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F \quad (17)$$

$$= 2 \|\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}\|_F \boldsymbol{\Theta} (\|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F)_{k=1}^N \quad (18)$$

其中式(13)到式(14)应用了 Rayleigh 商的性质;式(14)到式(15)应用了矩阵的 Cauchy-Schwarz 不等式的性质,即对任意矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $|\operatorname{Tr}\{\mathbf{A}^H \mathbf{B}\}| \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}\|_F$  成立;式(15)到式(16)应用了文献[11]中引理 4. 式(16)到式(17)应用了下面二式中的关系:

对于  $\lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l))$  与  $\lambda_{\max}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l))$ , 有下二式成立

$$\lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l)) \geq \min_{\mathbf{Q}_l \in \mathcal{Q}_l} \lambda_{\min}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l)) = \lambda_{\min}(\mathbf{H}_{ll}^H (\mathbf{R}_{n_l} + P_s^{\max} \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_{lk} \mathbf{H}_{lk}^H)^{-1} \mathbf{H}_{ll}) = z_l^{\min} \quad (19)$$

$$\lambda_{\max}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l)) \leq \max_{\mathbf{Q}_l \in \mathcal{Q}_l} \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_l(\mathbf{Q}_l)) = \lambda_{\max}(\mathbf{H}_{ll}^H \mathbf{R}_{n_l}^{-1} \mathbf{H}_{ll}) = z_l^{\max} \quad (20)$$

最后利用式(18)可得

$$\operatorname{Re} \{ [\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}, \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(2)})] \} = \sum_{l=1}^N \operatorname{Re} \{ [\mathbf{Q}_l^{(1)} - \mathbf{Q}_l^{(2)}, \mathbf{F}_l(\mathbf{Q}_l^{(1)}) - \mathbf{F}_l(\mathbf{Q}_l^{(2)})] \} \quad (21)$$

$$= 2 \left( (\|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F)_{k=1}^N \right)^T \boldsymbol{\Theta} (\|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F)_{k=1}^N \quad (22)$$

$$= \left( (\|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F)_{k=1}^N \right)^T (\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^T) \left( (\|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F)_{k=1}^N \right) \quad (23)$$

$$\geq \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^T) \|\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\|_F^2 \quad (24)$$

由  $\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^T > 0$  易知存在  $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^T) > 0$ , 从而  $F$  为强单调的. 对于  $VI(\widehat{Q}, F)$ , 如果映射  $F$  为强单调的, 则  $VI(\widehat{Q}, F)$  的解唯一, 从而其等价  $NE$  存在唯一的 Nash 均衡解.

#### 4 固定价格系数下的 MIMO 迭代注水算法

首先研究给定任意价格系数  $\mathbf{c} \in R_+^M$  时如何求解  $NE(\mathbf{c})$ , 在此基础上, 后文进一步研究求解  $NE$  的算法.

对于  $NE(\mathbf{c})$  中的任意 MIMO-CR $l$ , 其 Lagrange 方程与 KKT 最优性条件可表示为

$$L(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}; \mathbf{c}) = -U_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}) + \mu_l (\operatorname{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} - P_s^{\max}) - \operatorname{Tr}\{\boldsymbol{\Psi}_l \mathbf{Q}_l\} \quad (25)$$

$$-(\mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}) \mathbf{H}_{ll}^{-H} + \mathbf{Q}_l)^{-1} + \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql} + \mu_l \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi}_l = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\mu_l \geq 0, \operatorname{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} \leq P_s^{\max}, \mu_l \operatorname{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} - P_s^{\max} = 0 \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_l \geq \mathbf{0}, \mathbf{Q}_l \geq \mathbf{0}, \operatorname{Tr}\{\boldsymbol{\Psi}_l \mathbf{Q}_l\} = 0 \quad (28)$$

其中  $\mu_l$  与  $\boldsymbol{\Psi}_l$  分别为对应于最大发送功率约束以及正半定发送协方差矩阵约束的对偶变量.

由上述方程式可得在给定  $\mathbf{Q}_{-l}$  的条件下, MIMO-CR $l$  可通过下面的 MIMO 注水映射  $WF_l(\mathbf{Q}_{-l}; \mathbf{c}): \mathcal{Q}_{-l} \ni \mathbf{Q}_{-l} \rightarrow \mathbf{Q}_l \in \mathcal{Q}_l$  计算最优  $\mathbf{Q}_l$

$$\mathbf{Q}_l = WF_l(\mathbf{Q}_{-l}; \mathbf{c}) = \left[ (\mu_l \mathbf{I} + \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql})^{-1} - \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}) \mathbf{H}_{ll}^{-H} \right]_{\text{eig}}^+ \quad (29)$$

其中  $\mu_l$  值的选择需满足式  $\operatorname{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} \leq P_s^{\max}$ ;  $[\mathbf{A}]_{\text{eig}}^+$  表示对  $\mathbf{A}$  进行特征值分解并取非负特征值, 其定义为  $[\mathbf{A}]_{\text{eig}}^+ \triangleq \sum_i [\lambda_i]^+ \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ ,  $\lambda_i$  和  $\mathbf{u}_i$  分别为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值及相应的特征向量,  $[a]^+$  定义为  $[a]^+ \triangleq \max(0, a)$ .

由 Nash 均衡解的定义可知  $NE(\mathbf{c})$  的 Nash 均衡解  $\mathbf{Q}_l^{\text{equ}}(\mathbf{c}), l=1, 2, \dots, N$ , 可表示为如下的注水映射等式

$$\mathbf{Q}_l^{\text{equ}}(\mathbf{c}) = WF_l(\mathbf{Q}_{-l}^{\text{equ}}(\mathbf{c}); \mathbf{c}), \forall l=1, 2, \dots, N \quad (30)$$

由 Nash 均衡的性质易知  $NE(\mathbf{c})$  的 Nash 均衡解可被看作注水映射动态系统的固定点, 因此可以通过下面的同步迭代算法 1 来分布式计算  $NE(\mathbf{c})$  的 Nash 均衡解  $\mathbf{Q}^{\text{equ}}(\mathbf{c})$ .

**算法 1 固定价格系数下的 MIMO IWFA**

- 步骤 1 选择任意  $\mathbf{Q}^{(0)}(\mathbf{c}) \in Q$ , 初始化迭代指数  $n_1 = 0$ ;  
 步骤 2 若  $\mathbf{Q}^{(n_1)}(\mathbf{c})$  满足停止条件, 停止, 输出  $\mathbf{Q}^{opt}(\mathbf{c}) = \mathbf{Q}^{(n_1)}(\mathbf{c})$ ;  
 步骤 3 所有 MIMO-CR 由式(29)同步更新  $\mathbf{Q}^{(n_1+1)}(\mathbf{c})$  如下  

$$\mathbf{Q}_l^{(n_1+1)}(\mathbf{c}) = WF_l(\mathbf{Q}_{-l}^{(n_1)}; \mathbf{c}), \forall l = 1, 2, \dots, N;$$
  
 步骤 4 设置  $n_1 \leftarrow n_1 + 1$ , 返回步骤 2.

**4.1 收敛性**

如 MIMO 注水映射(29)是一个收缩映射, 则算法 1 收敛到唯一 Nash 均衡解<sup>[13]</sup>. 当  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}^{**}$  且  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  时, 式(29)可通过矩阵投影方式表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_l(\mathbf{c}) &= WF_l(\mathbf{Q}_{-l}(\mathbf{c}); \mathbf{c}) \\ &= \left[ \left( \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql} \right)^{-1} - \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}) \mathbf{H}_l^{-H} \right]_{Q_l} \end{aligned} \quad (31)$$

其中  $[\cdot]_{Q_l}$  表示在  $Q_l$  上的投影. 对于  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 可使用经典 MIMO 迭代注水算法<sup>[10]</sup>的矩阵投影来代替式(31), 此时

$$\mathbf{Q}_l = WF_l(\mathbf{Q}_{-l}) = \left[ -(\mathbf{H}_l^H \mathbf{R}_{-l}^{-1}(\mathbf{Q}_{-l}) \mathbf{H}_l)^{-1} \right]_{Q_l} \quad (32)$$

利用上述的矩阵投影以及文献[13]可给出如下收敛性定理:

**定理 3** 定义矩阵  $\hat{\Phi}$  如下

$$[\hat{\Phi}]_{lk} = \begin{cases} 0, & k = l \\ \lambda_{\max}(\mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk}), & k \neq l \end{cases} \quad (33)$$

当满足  $\|\hat{\Phi}\|_F < 1$  时, 算法 1 收敛到唯一 Nash 均衡解.

**证明** 任意给定  $\mathbf{Q}^{(i)} = ((\mathbf{Q}_1^{(i)})^T, (\mathbf{Q}_2^{(i)})^T, \dots, (\mathbf{Q}_N^{(i)})^T)^T, i = 1, 2, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  且  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  时对任一 MIMO-CR $l$ , 由注水映射的矩阵投影(31)可得

$$\begin{aligned} &\|WF_l(\mathbf{Q}_{-l}^{(1)}) - WF_l(\mathbf{Q}_{-l}^{(2)})\|_F \\ &= \left\| \left[ \left( \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql} \right)^{-1} - \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}^{(1)}) \mathbf{H}_l^{-H} \right]_{Q_l} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left( \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql} \right)^{-1} - \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}^{(2)}) \mathbf{H}_l^{-H} \right]_{Q_l} \right\|_F \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \left[ \left( \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql} \right)^{-1} - \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}^{(1)}) \mathbf{H}_l^{-H} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left( \sum_{q=1}^M c_q \mathbf{h}_{ql}^H \mathbf{h}_{ql} \right)^{-1} - \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{R}_{-l}(\mathbf{Q}_{-l}^{(2)}) \mathbf{H}_l^{-H} \right]_F \right\|_F \end{aligned} \quad (35)$$

$$= \left\| \mathbf{H}_l^{-1} \left( \sum_{k=1, k \neq l}^N \mathbf{H}_{lk}(\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}) \mathbf{H}_{lk}^H \right) \mathbf{H}_l^{-H} \right\|_F \quad (36)$$

$$\leq \sum_{k=1, k \neq l}^N \left\| \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{H}_{lk}(\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}) \mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_l^{-H} \right\|_F \quad (37)$$

$$\leq \sum_{k=1, k \neq l}^N \lambda_{\max}(\mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk}) \|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F \quad (38)$$

其中式(34)到(35)应用了凸集上投影运算符在 Frobenius 范数下的非扩散性质.

$$\text{令 } [\hat{\Phi}]_{lk} = \begin{cases} 0, & k = l \\ \lambda_{\max}(\mathbf{H}_{lk}^H \mathbf{H}_{ll}^{-H} \mathbf{H}_{ll}^{-1} \mathbf{H}_{lk}), & k \neq l \end{cases}, \text{ 由式(38)}$$

可得

$$\begin{aligned} &\|WF(\mathbf{Q}^{(1)}) - WF(\mathbf{Q}^{(2)})\|_F \\ &= \left\| \left( \left\| WF_k(\mathbf{Q}^{(1)}) - WF_k(\mathbf{Q}^{(2)}) \right\|_F \right)_{k=1}^N \right\| \\ &\leq \|\hat{\Phi}(\|\mathbf{Q}_k^{(1)} - \mathbf{Q}_k^{(2)}\|_F)_{k=1}^N\| \\ &\leq \|\hat{\Phi}\|_F \|\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}\|_F \end{aligned} \quad (39)$$

因此当满足  $\|\hat{\Phi}\|_F < 1$ , 由文献[13]易知  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  且  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  时相应的注水映射(29)收敛到唯一 Nash 均衡解. 同样的方法容易证明当满足  $\|\hat{\Phi}\|_F < 1, \mathbf{c} = \mathbf{0}$  时相应的注水映射也收敛到唯一 Nash 均衡解, 因而算法 1 收敛到唯一 Nash 均衡解的充分条件为  $\|\hat{\Phi}\|_F < 1$ .

**5 分布式 MIMO-CR 迭代注水算法**

求解 NE 的 Nash 均衡解等价于求解合适的价格系数  $\mathbf{c}^{opt} = (c_p^{opt})_{p=1}^M \in R_+^M$ , 使得相应 NE( $\mathbf{c}^{opt}$ ) 的均衡解满足干扰温度约束, 即令下式成立

$$\begin{aligned} 0 \leq c_p^{opt} \perp P_{it} - \sum_{l=1}^N \text{Tr}\{ \mathbf{h}_{pl} \mathbf{Q}_l^{opt}(\mathbf{c}^{opt}) \mathbf{h}_{pl}^H \} \geq 0, \\ \forall p = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (40)$$

定义映射  $\Phi(\mathbf{c}) : \mathbf{c} \in R_+^M \mapsto R^M$  如下

$$\Phi : \mathbf{c} = (c_p)_{p=1}^M \mapsto \left( P_{it} - \sum_{l=1}^N \text{Tr}\{ \mathbf{h}_{pl} \mathbf{Q}_l^{opt}(\mathbf{c}) \mathbf{h}_{pl}^H \} \right)_{p=1}^M \quad (41)$$

则求解最优价格系数  $\mathbf{c}^{opt} \in R_+^M$  可被表示为非线性互补问题<sup>[12]</sup>(NCP: Nonlinear Complementary Problem)如下

$$NCP(\Phi), \mathbf{0} \leq \mathbf{c} \perp \Phi(\mathbf{c}) \geq \mathbf{0} \quad (42)$$

**算法 2 MIMO-CR IWFA**

- 步骤 1 选择  $\mathbf{c}^{(0)} \geq \mathbf{0}$ , 初始化迭代指数  $n_2 = 0$ ;  
 步骤 2 由算法 1 计算给定  $\mathbf{c}^{(n_2)}$  时的 Nash 均衡解  $\mathbf{Q}^{opt}(\mathbf{c}^{(n_2)})$ ;  
 步骤 3 若  $\mathbf{c}^{(n_2)}$  满足停止条件, 停止, 输出  $\mathbf{c}^{opt} = \mathbf{c}^{(n_2)}, \mathbf{Q}^{opt} = \mathbf{Q}^{opt}(\mathbf{c}^{(n_2)})$ ;  
 步骤 4 选择步长  $\tau_{n_2} > 0$  更新价格系数  $\mathbf{c}$  如下  

$$\mathbf{c}^{(n_2+1)} = [\mathbf{c}^{(n_2)} - \tau_{n_2} \Phi(\mathbf{c}^{(n_2)})]^+ \quad (43)$$
  
 步骤 5 设置  $n_2 \leftarrow n_2 + 1$ , 返回步骤 2.

基于求解 NCP 的可变步长投影算法<sup>[12, 算法 12.1.8]</sup> 本文给出求解价格系数  $\mathbf{c}^{opt}$  以及 NE 的 Nash 均衡解  $\mathbf{Q}^{opt}$  的 MIMO-CR 迭代注水算法 (MIMO-CR IWFA), 如算法 2 所示. 其中价格系数的更新在实际中可分布式实现如下:

首先参与博弈的所有 MIMO-CR 链路估计自身发送端与 PU 的信道状态信息, 随后相互交换各自得到的信道状态信息以及在当前价格均衡状态时所采用的发送

\*\*  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  表示向量  $\mathbf{c}$  中的元素非负.

协方差矩阵,分别独立计算  $\Phi$ ,再由式(43)得到下一步的价格系数  $\mathbf{c}$ .

### 5.1 收敛性

对于求解  $NCP(\Phi)$  的可变步长投影算法,由文献[12]中定理 12.1.8 其收敛性可给出如下:

**定理 4** 假定映射  $\Phi(\mathbf{c}): \mathbf{c} \in R_+^M \mapsto R^M$  为  $\mathbf{c}$  的模为  $c_{coc}(\Phi)$  的同强制 (co-coercive) 函数<sup>[12, 定义 2.3.9]</sup>, 即

$$\begin{aligned} & (\mathbf{c}^{(1)} - \mathbf{c}^{(2)})^T [\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})] \\ & \geq c_{coc}(\Phi) \|\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})\|_2^2 \end{aligned} \quad (44)$$

如果步长  $\tau_{n_2}$  满足

$$0 < \inf_{n_2} \tau_{n_2} \leq \sup_{n_2} \tau_{n_2} < 2c_{coc}(\Phi) \quad (45)$$

则算法 2 中价格系数更新所产生的序列  $\{\mathbf{c}^{(n_2)}\}_{n_2=0}^\infty$  收敛到  $NCP(\Phi)$  的解.

对于本文中  $\Phi(\mathbf{c})$  的模  $c_{coc}(\Phi)$  的大小,有以下命题成立

**命题 1** 给定  $\Theta + \Theta^T > 0$ , 则映射  $\Phi(\mathbf{c}): \mathbf{c} \in R_+^M \mapsto R^M$  是  $\mathbf{c}$  的模为  $c_{coc}(\Phi) = \frac{\lambda_{\min}(\Theta + \Theta^T)}{\max_{1 \leq p \leq M} \max_{1 \leq l \leq N} \max(\mathbf{h}_{pl} \mathbf{h}_{pl}^H)}$  的同强制函数.

**证明** 定义  $\Theta^{(i)} = ((\Theta_1^{(i)})^T, (\Theta_2^{(i)})^T, \dots, (\Theta_N^{(i)})^T)^T$ ,

其中  $\Theta_l^{(i)} = \sum_{p=1}^M c_p^{(i)} \mathbf{h}_{pl}^H \mathbf{h}_{pl}$ ,  $i = 1, 2$ , 则由变分不等式的性质可知下二式成立

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)})]^H [\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)})) \\ & + \Theta^{(2)}]\}\} \geq 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})]^H [\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})) \\ & + \Theta^{(1)}]\}\} \geq 0 \end{aligned} \quad (47)$$

将式(46)、(47)相加可得

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})]^H [\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}]\}\} \geq \\ & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})]^H [\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)})) \\ & - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)}))]\}\} \end{aligned} \quad (48)$$

给定  $\Theta + \Theta^T > 0$ , 由  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  的强单调性质可知

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})]^H \\ & [\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)})) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)}))]\}\} \\ & \geq \lambda_{\min}(\Theta + \Theta^T) \|\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})\|_F^2 \end{aligned} \quad (49)$$

由式(48)、(49)易知

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})]^H [\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}]\}\} \\ & \geq \lambda_{\min}(\Theta + \Theta^T) \|\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})\|_F^2 \end{aligned} \quad (50)$$

由映射  $\Phi(\mathbf{c})$  的定义可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{c}^{(1)} - \mathbf{c}^{(2)})^T [\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})] \\ & = \sum_{p=1}^M \sum_{l=1}^N (c_p^{(1)} - c_p^{(2)}) \text{Tr}\{\mathbf{h}_{pl} [\mathbf{Q}_l^{equ}(\mathbf{c}^{(2)}) - \mathbf{Q}_l^{equ}(\mathbf{c}^{(1)})] \\ & \mathbf{h}_{pl}^H\} \end{aligned} \quad (51)$$

同时由  $\Theta$  的定义可知

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\Theta^{(1)})]^H [\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}]\}\} \\ & = \sum_{p=1}^M \sum_{l=1}^N (c_p^{(1)} - c_p^{(2)}) \text{Tr}\{\mathbf{h}_{pl} [\mathbf{Q}_l^{equ}(\Theta^{(2)}) - \mathbf{Q}_l^{equ}(\Theta^{(1)})] \mathbf{h}_{pl}^H\} \end{aligned} \quad (52)$$

由式(51)、(52)相等且联合式(50)可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{c}^{(1)} - \mathbf{c}^{(2)})^T [\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})] \\ & = \text{Re}\{\text{Tr}\{[\mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(1)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(2)})]^H (\mathbf{c}^{(2)} - \mathbf{c}^{(1)})\}\} \\ & \geq \lambda_{\min}(\Theta + \Theta^T) \|\mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(1)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(2)})\|_F^2 \end{aligned} \quad (53)$$

再由  $\Phi(\mathbf{c})$  的定义易知

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})\|_2^2 \\ & = \left\| \left( \sum_{l=1}^N \mathbf{h}_{pl}^H [\mathbf{Q}_l^{equ}(\mathbf{c}^{(2)}) - \mathbf{Q}_l^{equ}(\mathbf{c}^{(1)})] \mathbf{h}_{pl} \right)_{p=1}^M \right\|_2^2 \\ & \leq \sum_{p=1}^M \sum_{l=1}^N \|\mathbf{h}_{pl}^H [\mathbf{Q}_l^{equ}(\mathbf{c}^{(2)}) - \mathbf{Q}_l^{equ}(\mathbf{c}^{(1)})] \mathbf{h}_{pl}\|_2^2 \\ & \leq \max_{1 \leq p \leq M} \max_{1 \leq l \leq N} \lambda_{\max}(\mathbf{h}_{pl} \mathbf{h}_{pl}^H) \|\mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(1)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(2)})\|_F^2 \end{aligned} \quad (54)$$

最后由式(53)、(54)可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{c}^{(1)} - \mathbf{c}^{(2)})^T [\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})] \\ & \geq \lambda_{\min}(\Theta + \Theta^T) \|\mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(1)}) - \mathbf{Q}^{equ}(\mathbf{c}^{(2)})\|_F^2 \\ & \geq \frac{\lambda_{\min}(\Theta + \Theta^T)}{\max_{1 \leq p \leq M} \max_{1 \leq l \leq N} \lambda_{\max}(\mathbf{h}_{pl} \mathbf{h}_{pl}^H)} \|\Phi(\mathbf{c}^{(1)}) - \Phi(\mathbf{c}^{(2)})\|_2^2 \end{aligned} \quad (55)$$

## 6 仿真结果

本节中使用 MATLAB 仿真验证 MIMO-CR IWFA 的收敛性并比较了本文的 MIMO-CR IWFA 以及经典 MIMO IWFA 的性能.

仿真所使用的无线场景中的 PU 系统包含  $M$  个正在工作的单天线 PU 接收节点, CR 系统包含  $N$  个竞争频谱的 MIMO-CR 链路, 每条链路发送节点与接收节点分别装备有  $n_T = n_R$  根天线. 简单起见, 设定所有 MIMO-CR 接收节点接收到的噪声与 PU 干扰之和的协方差相等为  $\sigma_n^2$  且归一化为 1; 同时设定所有 MIMO-CR 链路中收发节点的距离相等为  $d_s$  且归一化为 1, 且所有 MIMO-CR 发送节点与任一 PU 接收节点间的距离相等且  $d_{sp} = 2$ ; 路径损耗系数  $\gamma$  设定为 2.5.

图 2 中所示的分别是使用 MIMO-CR IWFA 时 8 条 MIMO-CR 链路各自所获取的信息速率、所有 MIMO-CR 对 PU 的叠加干扰以及相应的价格系数随着迭代系数的更新过程. 仿真中使用了强同信道干扰的恶劣场景, 对任一 MIMO-CR 接收节点, 设定所有其他 MIMO-CR 链路的发送节点与它之间的距离都为  $d_{ss} = 1$ ,  $P_{ss}^{\max}/\sigma_n^2 = 10\text{dB}$ , PU 的干扰门限  $P_{it}$  为 2. 信道系数为独立同分布的 0 均值单位方差高斯随机变量. 设置开始时的发送协方差矩阵  $\mathbf{Q}^{(0)} = 0$ , 价格系数  $\mathbf{c}^{(0)} = 0$ , 从图中看出经过总数 60 次左右的迭代后, 价格系数很快收敛到最优解,

\*\* 设定干扰门限为 2 倍.

使得所有 MIMO-CR 对 PU 的叠加干扰满足干扰温度约束,同时发送协方差矩阵收敛到 Nash 均衡解(表现在信息速率趋于稳定状态).需要说明的是对其他的随机信道系数以及其他数目的 PU 所做的仿真也具有同样的快速收敛性.由于开始价格系数为 0,从而 MIMO-CR IWFA 在迭代开始时等价于经典 MIMO IWFA,从图 2(b) 迭代开始处可知仅经过一次迭代后 MIMO IWFA 对 PU 的叠加干扰已超出干扰门限.

图 3、图 4 中所示的是在 600 次的信道实现下、分别

在不同的干扰门限及不同的天线数目时 MIMO-CR IWFA 与 MIMO IWFA 所获取的单用户平均信息速率随同信道干扰的变化关系,其中属于不同 MIMO-CR 链路的收发节点间的距离  $d_{ss}$  被用来表示不同程度的同信道干扰,显然  $d_{ss}$  越小,同信道干扰越严重.从图中可看出对不同的干扰门限以及不同的天线数目, MIMO-CR IWFA 取得的平均信息速率都随着 MIMO-CR 之间的同信道干扰加剧不断逼近经典 MIMO IWFA,且在强信道干扰时, MIMO-CR IWFA 取得了与 MIMO IWFA 接近的性能.

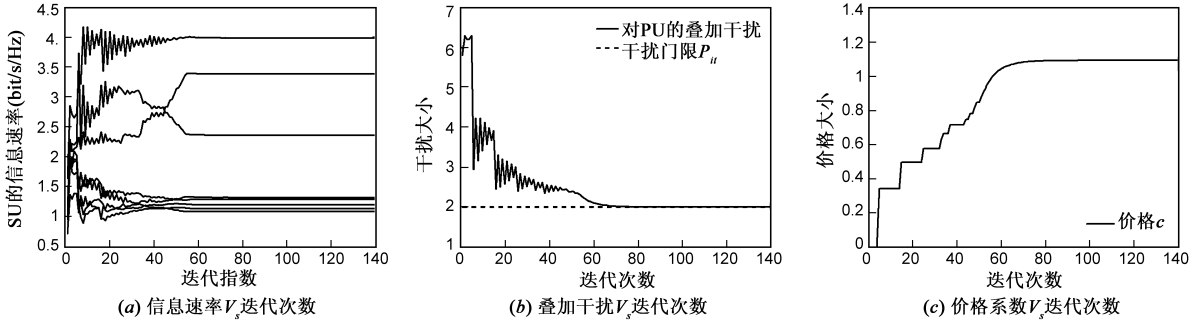


图 2 MIMO-CR IWFA 的收敛过程( $M=1, N=8, n_T=n_R=4, d_s=1, d_{ss}=1, d_{sp}=2, P_s^{max}/\sigma_n^2=10\text{dB}, P_{ii}=2, \gamma=2.5$ )

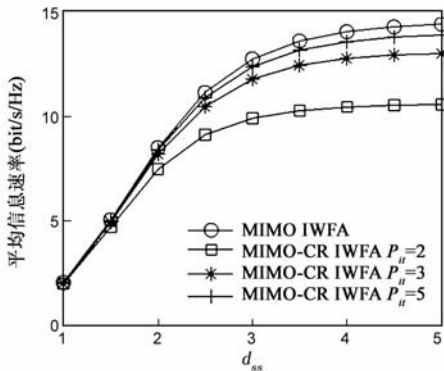


图 3 不同干扰门限下的平均信息速率比较( $M=1, N=8, n_T=n_R=4, d_s=1, d_{sp}=2, P_s^{max}/\sigma_n^2=10\text{dB}, \gamma=2.5$ )

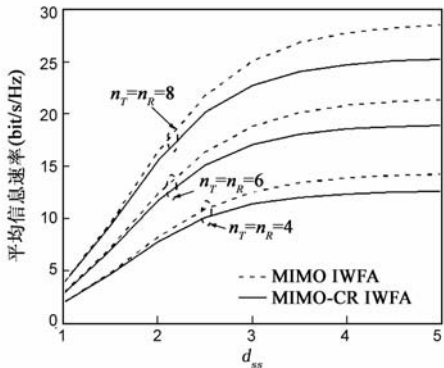


图 4 不同数目天线下的平均信息速率比较( $M=1, N=8, d_s=1, d_{sp}=2, P_s^{max}/\sigma_n^2=10\text{dB}, P_{ii}=3, \gamma=2.5$ )

### 7 结论

本文通过非合作博弈来建模认知无线环境中在干扰温度约束下的多个 MIMO-CR 的波形自适应问题,提

出了一种带价格系数的分布式迭代注水算法, MIMO-CR IWFA 算法,来解决干扰温度约束下的多 MIMO-CR 波形自适应问题.本文算法能很好的满足干扰温度约束,从而能在有效保护 PU QoS 的前提下与 PU 共享频谱,且具有收敛速度快、计算复杂度低的特点.同时本文的研究结果表明对于多个互相竞争的 MIMO-CR 用户来说, PU 的干扰温度约束对其性能的影响随着 MIMO-CR 用户间的同信道干扰的增强而逐渐减弱.

### 参考文献

- [1] Facilitating Opportunities for Flexible, Efficient, and Reliable Spectrum Use Employing Cognitive Radio Technologies, Notice of Proposed Rule Making and Order [R]. FCC 03-322 Federal Communications Commission, 2003. [http://transition.fcc.gov/Document\\_Indexes/Engineering\\_Technology/2003\\_index\\_OET\\_Notice.html](http://transition.fcc.gov/Document_Indexes/Engineering_Technology/2003_index_OET_Notice.html).
- [2] Haykin S. Cognitive radio: brain-empowered wireless communications [J]. IEEE Journals on Selected Areas in Communications, 2005, 23(2): 201 - 220.
- [3] 马志 ■, 曹志刚. 认知无线网络用户合作机会接入方案的研究 [J]. 电子学报, 2009, 37(4): 678 - 683.  
Ma Z Y, Cao Z G. Secondary user cooperative opportunistic access scheme in cognitive radio networks [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(4): 678 - 683. (in Chinese)
- [4] 张然然, 等. 认知无线电下行链路中的 OFDMA 资源分配算法 [J]. 电子学报, 2010, 38(3): 632 - 637.  
Zhang R R, et al. OFDMA based resource allocation for downlink cognitive radio systems [J]. Acta Electronica Sinica, 2010,

38(3):632 – 637. (in Chinese)

- [5] 刘琪,等.基于跳频的自适应频谱共享方案[J].电子学报,2010,38(1):105 – 110.  
Liu Qi, et al. Adaptive spectrum sharing scheme based on FH communications[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(1): 105 – 110. (in Chinese)
- [6] Zhang R, Liang Y C. Exploiting multi-antennas for opportunistic spectrum sharing in cognitive radio networks[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2008, 2(1): 88 – 102.
- [7] Al-Khasib T, et al. Single and multiple carrier designs for cognitive radio systems[A]. 2010 IEEE International Conference on Communications[C], South Africa, 2010. 1 – 6.
- [8] Ye S G, Blum R S. Optimized signaling for MIMO interference systems with feedback[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(11): 2839 – 2848.

- [9] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative game theory [M]. 2nd ed., Academic Press, New York, 1995.
- [10] Scutari G, et al. Competitive design of multiuser MIMO systems based on game theory: a unified view[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2008, 26(7): 1089 – 1103.
- [11] Scutari G, et al. The MIMO iterative waterfilling algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(5): 1917 – 1935.
- [12] Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem[M]. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [13] Bertsekas D P, Tsitsiklis J N. Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods [M]. Athena Scientific, 2nd Ed.: 1989. 182 – 183.

#### 作者简介



魏 飞 男,1982 年出生,安徽桐城人,博士生,研究方向为无线通信与网络信号处理.  
E-mail: feiwei.nupt@gmail.com



杨 震 男,1961 年出生,江苏苏州人,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为无线通信与网络信号处理、语音信号处理.